# *Sulla introduzione di una funzione indice di utilità*

§ 1. Scopo della presente nota è la enunciazione di un sistema di assiomi che permette la costruzione di una funzione definita in un sottoinsieme di uno spazio vettoriale sul campo reale ed ivi continua, che abbia le caratteristiche di quella che gli Economisti chiamano una « funzione indice di utilità ». Sostanzialmente si tratta quindi di introdurre un ordinamento totale nel sottoinsieme suddetto dello spazio vettoriale; lo scopo viene conseguito in modo che può anche essere considerato nuovo rispetto alle trattazioni abituali, avendo riguardo alle particolari applicazioni che si vogliono fare dei risultati qui conseguiti alla Economia matematica.

I risultati qui esposti sono già stati in parte pubblicati da chi scrive (1); tuttavia abbiamo creduto non inutile riprendere l'argomento per dare una trattazione più completa e rigorosa, in particolare per presentare la dimostrazione delle proprietà formali delle relazioni di preferenza e di indifferenza che qui sono introdotte (§ 3) e per dare una dimostrazione esplicita della indipendenza degli assiomi che qui sono stati scelti per fondare la trattazione (§ 6).

§ 2. In tutte le pagine che seguono indicheremo con $V$ uno spazio vettoriale ad $n$ dimensioni sul campo reale $\boldsymbol{R}$; supporremo che per il numero $n$ di dimensioni valga la limitazione

$$n \geq 2. \tag{1}$$

I vettori appartenenti a $V$ saranno indicati con lettere scritte in carattere grassetto; per porre in evidenza il fatto che il vettore $\boldsymbol{x}$ ammette

---

(1) Cfr. C. F. Manara & P. C. Nicola, *Elementi di Economia matematica*, Milano, 1967.

come componenti certi numeri reali

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

scriveremo, come d'uso,

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{2}$$

In particolare indicheremo con il simbolo $\mathbf{0}$ il vettore che ha tutte le componenti uguali a zero.

Useremo anche le seguenti convenzioni, per indicare certe relazioni che avremo bisogno di esprimere, tra vettori di $V$. Indicati con $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ due vettori di tale spazio scriveremo

$$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y} \tag{3}$$

per indicare che ogni componente di $\boldsymbol{x}$ è maggiore della corrispondente componente di $\boldsymbol{y}$; in formule, posto

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n] \tag{4}$$

la (3) indicherà che per ogni indice $i$ si ha

$$x_i > y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{5}$$

con il simbolo

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} \tag{6}$$

indicheremo che si ha per ogni indice $i$

$$x_i \geq y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

e che si ha anche

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \tag{8}$$

ossia che per almeno un indice $j$ si ha

$$x_j > y_j\,; \tag{9}$$

infine con il simbolo

$$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y} \tag{10}$$

indicheremo che per ogni indice $i$ sussiste la relazione (7).

Nel seguito prenderemo in considerazione soltanto vettori di $V$ che appartengono a certi sottoinsiemi dello spazio $V$, sottoinsiemi che indicheremo rispettivamente con i simboli $X$, $X^+$, $X^{++}$. Precisamente indicheremo con $X$ l'insieme dei vettori $V$ che hanno componenti non negative; porremo cioè

$$X = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}. \tag{11}$$

Indicheremo poi con $X^+$ l'insieme dei vettori di $V$ diversi dal vettore $\mathbf{0}$ che hanno componenti non negative; porremo cioè

$$X^+ = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}; \tag{12}$$

infine indicheremo con $X^{++}$ l'insieme dei vettori di $V$ che hanno tutte le componenti positive; porremo cioè

$$X^{++} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\}. \tag{13}$$

È chiaro che per gli insiemi sopra definiti valgono le relazioni

$$X^{++} \subset X^+ \subset X. \tag{14}$$

Indicheremo poi con il simbolo $|\boldsymbol{x}|$ il numero reale che è la norma del vettore $\boldsymbol{x}$, ponendo cioè

$$|\boldsymbol{x}| = \{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\}^{1/2}. \tag{15}$$

Conseguentemente introdurremo nello spazio $V$ (e negli insiemi $X$, $X^+$, $X^{++}$) una topologia definita dalla abituale nozione di distanza euclidea di due vettori, data da

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{1/2}. \tag{16}$$

È immediato osservare che rispetto a tale topologia l'insieme $X$ risulta essere chiuso, mentre gli insiemi $X^+$ ed $X^{++}$ sono aperti. In particolare la frontiera dell'insieme $X$ è costituita da tutti i vettori aventi almeno una componente uguale a zero.

Considerato un qualunque vettore $\boldsymbol{x}$ ed un numero reale positivo $\delta$, chiameremo, secondo l'uso, « intorno di $\boldsymbol{x}$ di raggio $\delta$ » ed indicheremo con il simbolo

$$\mathrm{Int}(\boldsymbol{x},\ \delta)$$

l'insieme dei vettori la cui distanza da $\boldsymbol{x}$ è minore di $\delta$.

§ 3. Introdurremo in questo paragrafo certi assiomi che ci permetteranno di costruire una funzione dei vettori di $X$ che ha i caratteri di quelle che gli Economisti chiamano una « funzione indice di utilità ». È appena necessario avvertire che qui il termine « assioma » non indica una proposizione assolutamente incontrovertibile, secondo l'accezione talvolta usata nel linguaggio comune, ma soltanto una proposizione che viene *posta*, con una certa larga arbitrarietà, all'inizio di una teoria. Intendiamo accettare il giudizio degli Economisti ed in particolare degli studiosi delle questioni riguardanti il comportamento del consumatore, sulla attendibilità degli assiomi che enunceremo, per quanto attiene la adeguatezza a descrivere ciò che avviene in realtà, in un sistema economico.

Per la formulazione degli assiomi ci serviremo del simbolismo della Logica matematica, secondo la trattatistica più corrente oggi in Italia ([1]).

Gli assiomi di cui parliamo mirano anzitutto ad introdurre, nell'insieme $X$ che si considera, una relazione tra vettori che verrà chiamata relazione di *preferenza debole*, (per distinguerla da una relazione di *preferenza forte* che verrà definita in seguito); tale relazione si intenderà definita implicitamente dagli assiomi che enunceremo.

Indicheremo il fatto che tra due vettori $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ di $X$ intercede la relazione di preferenza debole scrivendo il simbolo « $\mathfrak{R}$ » tra i simboli dei due vettori, con una formula del tipo

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y}$$

che leggeremo convenzionalmente con la frase « $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso debole ad $\boldsymbol{y}$ » o con altre frasi analoghe.

Pertanto il simbolo « $\mathfrak{R}$ » si presenta come il simbolo di un predicato biargomentale, che ha come argomenti i simboli dei vettori appartenenti ad $X$.

---

([2]) Cfr. per es. A. PASQUINELLI, *Introduzione alla logica simbolica* (Torino, 1957); W. V. O. QUINE, *Manuale di logica* (Milano, 1960); E. CASARI, *Lineamenti di logica matematica* (Milano, 1960).

Precisiamo infine che le relazioni che scriveremo si intenderanno valide quali che siano i vettori appartenenti ad $X$. Pertanto ci esimeremo di premettere alle formule che esprimeranno gli assiomi il simbolo di quantificazione universale, intendendo di avere eseguito ora verbalmente tale operazione.

Fatte queste premesse, possiamo passare ad enunciare gli assiomi annunciati.

Ax. 1 -

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Ogni vettore $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso debole a se stesso.

Ax. 2 -

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

dati due vettori $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ almeno una delle due proposizioni deve essere valida: o $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso debole ad $\boldsymbol{y}$ oppure $\boldsymbol{y}$ è preferito in senso debole ad $\boldsymbol{x}$; non si esclude ovviamente che siano valide tutte e due.

Questo assioma afferma che la relazione di preferenza debole che abbiamo indicata con il simbolo « $\mathfrak{R}$ » stabilisce nell'insieme $X$ di vettori un ordinamento *totale*; in altre parole si potrebbe dire che due vettori rispetto a questa relazione di preferenza sono sempre confrontabili tra loro, oppure anche che non esistono coppie di vettori di $X$ che non siano confrontabili rispetto a questa relazione di preferenza debole.

Ax. 3 -

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z} \rightarrow \boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{z}. \tag{3}$$

Dati tre vettori qualunque appartenenti all'insieme $X$, se il vettore $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso debole al vettore $\boldsymbol{y}$ ed $\boldsymbol{y}$ a sua volta è preferito in senso debole al vettore $\boldsymbol{z}$, allora il vettore $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso debole a $\boldsymbol{z}$. In parole questa proprietà della relazione di preferenza debole può essere espressa dicendo che tale relazione possiede la proprietà *transitiva*.

Come è noto, quando le componenti di un vettore $\boldsymbol{x} \in X$ siano interpretate come quantità di beni che sono a disposizione di un consumatore e alla relazione di « preferenza » viene dato il significato che ad essa viene attribuito nel linguaggio comune, allora questo assioma viene abitualmente chiamato « assioma di coerenza » delle scelte del consumatore stesso.

Invero la proprietà transitiva che ora abbiamo enunciata per la relazione « $\mathfrak{R}$ » viene a costituire una proprietà che stabilisce un comportamento del tipo che si potrebbe chiamare « coerente » quando si assuma come atta a qualificare il consumatore.

§ 4. I tre assiomi che abbiamo enunciati nel paragrafo precedente a proposito della relazione di preferenza in senso debole permettono di stabilire alcune interessanti proprietà di una seconda relazione che definiremo in base alla precedente; chiameremo questa nuova relazione *relazione di indifferenza* tra due vettori; il fatto che tra due vettori interceda una relazione cosiffatta sarà qui indicato scrivendo il simbolo « $\mathfrak{J}$ » tra i simboli dei due vettori. Pertanto anche il simbolo $\mathfrak{J}$ si presenta come il simbolo di un predicato biargomentale, definito dalla seguente formula:

$$(1) \qquad \boldsymbol{y}\mathfrak{J}\boldsymbol{x} =_{\mathrm{df.}} \boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x};$$

diremo quindi che due vettori sono indifferenti se ognuno di essi è preferito in senso debole all'altro.

È del tutto ovvio, in base alla (1) ed all'Ax. 1 che si ha per ogni vettore $\boldsymbol{x}$ la relazione

$$(2) \qquad \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{x}.$$

Questa proprietà potrebbe essere espressa con parole dicendo che per la relazione di indifferenza ora definita vale la proprietà riflessiva.

Si ha inoltre molto facilmente che per la relazione di indifferenza ora definita valgono le proprietà simmetrica e transitiva; si ha cioè,

$$(3) \qquad \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y}\mathfrak{J}\boldsymbol{x}$$

$$(4) \qquad \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{J}\boldsymbol{z} \rightarrow \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{z}.$$

Pertanto la relazione di indifferenza si presenta con le proprietà formali di quelle che vengono talvolta chiamate « relazioni equaliformi »; quindi i vettori dell'insieme $X$ vengono ripartiti in classi disgiunte dalla relazione suddetta; indicheremo con il simbolo $\{\boldsymbol{x}/\mathfrak{J}\}$ l'insieme di tutti i vettori che sono nella relazione di indifferenza rispetto al vettore $\boldsymbol{x}$: porremo cioè

(5) $$\{\boldsymbol{x}/\mathfrak{J}\}=\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}\mathfrak{J}\boldsymbol{x}\}.$$

L'insieme delle classi di indifferenza si presenta quindi come l'*insieme quoziente* dell'insieme $X$ rispetto alla relazione $\mathfrak{J}$ avente le proprietà formali ora precisate. L'insieme $\{\boldsymbol{x}/\mathfrak{J}\}$ verrà anche chiamato *varietà di indifferenza* contenente il vettore $\boldsymbol{x}$.

Definiamo infine una terza relazione, che chiameremo *relazione di preferenza forte* tra coppie di vettori dell'insieme $X$; il fatto che due vettori di $X$ stiano tra loro nella relazione suddetta verrà indicato scrivendo il simbolo « $\mathfrak{S}$ » tra i simboli dei due vettori; pertanto anche il simbolo « $\mathfrak{S}$ » si presenta come il simbolo di un predicato biargomentale valido sull'insieme $X$ di vettori; porremo

(6) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}=_{\mathrm{df.}}\neg\boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x}$$

diremo cioè che il vettore $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso forte ad $\boldsymbol{y}$ se $\boldsymbol{y}$ non è preferito in senso debole ad $\boldsymbol{x}$.

Per le relazioni di preferenza e di indifferenza che abbiamo testè definite valgono le proprietà espresse dalle formule seguenti:

(7) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y}\rightarrow\neg\boldsymbol{y}\mathfrak{S}\boldsymbol{x}$$

(8) $$\neg\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{x}$$

(9) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y}\rightarrow\neg\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}$$

(10) $$\neg(\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{y}\mathfrak{S}\boldsymbol{x})$$

(11) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}\rightarrow\neg\boldsymbol{y}\mathfrak{S}\boldsymbol{x}$$

(12) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{y}\mathfrak{S}\boldsymbol{z}\rightarrow\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{z}$$

(13) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z}\rightarrow\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{z}$$

(14) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{y}\mathfrak{J}\boldsymbol{z}\rightarrow\boldsymbol{x}\mathfrak{S}\boldsymbol{z}.$$

Ci limitiamo qui a dare la dimostrazione di alcune tra queste formule, dimostrazione che si consegue in base agli assiomi, alle definizioni ed alle proprietà della logica elementare.

Anzitutto per quanto riguarda la (7), essa si deduce dalla definizione (6), applicando la legge della doppia negazione. La (8) si deduce dalla relazione (7) ora dimostrata ponendo in questa $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$; anche la (9) si deduce immediatamente dalla (7) e dalla definizione (1) che abbiamo data della relazione di indifferenza.

Per quanto riguarda la (10), essa può esser dedotta dall'Ax. 2, scritto, mediante la legge della doppia negazione, nella forma

$$\neg[\neg \boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y}] \vee \neg[\neg \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x}]; \tag{15}$$

di qui, applicando le leggi di DE MORGAN e la definizione (6) si trae la (10).

La dimostrazione della (11) è immediata in conseguenza della (7) e della equivalenza delle due proposizioni

$$\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}. \tag{16}$$

Per quanto riguarda la (12) si osservi che, sempre tenendo conto della equivalenza delle due proposizioni (16) sopra ricordata, l'Ax. 3 può essere scritto nella forma

$$\neg(\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z}) \vee \boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{z} \tag{17}$$

e quindi, applicando le leggi di DE MORGAN e la definizione (6), si ha

$$\boldsymbol{y}\mathfrak{I}\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z}\mathfrak{I}\boldsymbol{y} \vee \neg \boldsymbol{z}\mathfrak{I}\boldsymbol{x}. \tag{18}$$

Si osservi ora che, quali che siano le proposizioni $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ la proposizione

$$[(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{R})] \rightarrow \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{Q} \tag{19}$$

è sempre vera, come si verifica facilmente. Si pongano ora rispettivamente, al posto delle proposizioni $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ le proposizioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}\mathfrak{I}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z}\mathfrak{I}\boldsymbol{y} \vee \neg \boldsymbol{z}\mathfrak{I}\boldsymbol{x} \\ \neg\, \boldsymbol{x}\mathfrak{I}\boldsymbol{y}. \end{cases}$$

Allora la (18) può essere scritta nella forma $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ e per la (11) si ha anche $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{R}$. È quindi vera la proposizione $\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{Q}$, cioè la

$$\neg \boldsymbol{x}\mathfrak{I}\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z}\mathfrak{I}\boldsymbol{y} \vee \neg \boldsymbol{z}\mathfrak{I}\boldsymbol{x}. \tag{19}$$

Alternando l'ordine delle proposizioni e applicando le leggi di DE MORGAN si ha quindi

$$\neg [\boldsymbol{z}\mathfrak{J}\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y}] \vee \boldsymbol{z}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \tag{20}$$

e di qui, per la equivalenza delle proposizioni (16) segue la

$$\boldsymbol{z}\mathfrak{J}\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{z}\mathfrak{J}\boldsymbol{y}$$

la quale, con un inessenziale scambio dei nomi dei vettori, può essere portata a coincidere con la (12).

Per quanto riguarda la (13) si osservi che l'Ax. 3 può essere scritto nella forma

$$\boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{z}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \tag{21}$$

ossia,

$$\neg [\boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{z}\mathfrak{R}\boldsymbol{x}] \vee \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \tag{22}$$

e di qui, applicando le leggi di DE MORGAN, si ha

$$\neg \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z} \vee \neg \boldsymbol{z}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \tag{23}$$

ossia

$$\neg [\neg \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z}] \vee \neg \boldsymbol{z}\mathfrak{R}\boldsymbol{x} \tag{24}$$

e di qui, per la definizione (6) si trae la (13).

Infine per dimostrare la (14), si osservi anzitutto che quali che siano le proposizioni $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, è sempre vera la proposizione

$$[\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}] \rightarrow [\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Q}] \tag{25}$$

come si verifica facilmente.

Ponendo ora nella (25) al posto delle proposizioni $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ rispettivamente le proposizioni

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{z}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \end{array}\right.$$

si ottiene la (14), ricordando la definizione (1).

§ 5. Enunceremo in questo paragrafo altri due assiomi che collegano la relazione di preferenza che abbiamo presentato fin qui con le relazioni tra i vettori dell'insieme $X$ che abbiamo stabilite con le formule (3, (6), (10) del § 2 e con la topologia che abbiamo stabilito nello spazio vettoriale $V$. Tali assiomi sono i seguenti:

Ax. 4 -

$$x \geq y \rightarrow x \mathfrak{F} y. \tag{1}$$

In parole questo assioma potrebbe essere espresso dicendo che se tutte le componenti di un vettore $\boldsymbol{x}$ sono non minori di quelle corrispondenti del vettore $\boldsymbol{y}$ ed esiste anche una sola tra le componenti del vettore $\boldsymbol{x}$ che è maggiore della corrispondente del vettore $\boldsymbol{y}$, allora $\boldsymbol{x}$ è preferito nel senso forte ad $\boldsymbol{y}$.

Da questo assioma si deduce immediatamente la seguente proposizione:

$$\forall x \exists y [y \mathfrak{F} x]. \tag{2}$$

In parole: dato un qualunque vettore $\boldsymbol{x}$ esiste un vettore $\boldsymbol{y}$ che è strettamente preferito ad $\boldsymbol{x}$.

Tale proposizione, che qui deduciamo dall'Assioma 4 viene presentata spesso, in altre costruzioni che seguono una via logicamente diversa da quella qui scelta, sotto il nome di « assioma di non sazietà del consumatore ».

Invero stante questa proposizione, e considerata la relazione di preferenza nel senso che a questo termine viene attribuito dal linguaggio comune, evidentemente il consumatore non può mai considerarsi « sazio » perchè esiste sempre qualche combinazione di beni la quale viene giudicata come preferita da parte sua, per il fatto che almeno una delle componenti del secondo vettore di beni è maggiore (e tutte le altre sono non minori) delle componenti del vettore dei beni di partenza.

Per enunciare l'ultimo assioma che ci interessa indichiamo qui e nel seguito con il simbolo $M(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in X)$ l'insieme di tutti i vettori dell'insieme $X$ che sono preferiti in senso debole al vettore $\boldsymbol{x}$; sia quindi

$$M(x) = \{ y \mid y \in X \wedge y \mathfrak{R} x \}. \tag{3}$$

Considerato poi un insieme qualunque $A$ di vettori dello spazio $V$ indichiamo secondo il solito con il simbolo $\partial A$ l'insieme degli elementi di accumulazione di elementi dell'insieme $A$, secondo la topologia che abbiamo stabilito nello spazio $V$. Pertanto la validità della relazione

$$\partial A \subset A$$

indicherà che l'insieme $A$ è chiuso, rispetto alla topologia suddetta.

Con queste convenzioni di linguaggio, che abbiamo qui richiamate potremo enunciare il quinto assioma che abbiamo in vista nella forma seguente

Ax. 5 -

$$x \in X \rightarrow \partial M(x) \subset M(x) \tag{4}$$

ossia, in parole, l'insieme dei vettori che sono preferiti in senso debole ad un qualunque vettore $\boldsymbol{x}$ dell'insieme $X$ è chiuso.

§ 6. Procederemo ora alla constatazione della indipendenza degli assiomi che abbiamo enunciati; come conseguenza di un noto teoremo di B. Levi (3) potremo limitarci a constatare la indipendenza *ordinata* degli assiomi stessi, cioè potremo limitarci a constatare che ogni assioma non dipende da quelli che sono stati enunciati prima di lui; la constatazione sarà fatta, come d'abitudine, costruendo dei modelli di spazi vettoriali e di relazioni che non soddisfano all'assioma considerato pur soddisfacendo a tutti quelli che lo precedono.

Per quanto riguarda l'Ax. 2 si verifica subito che quando si ponga

$$\boldsymbol{x} \mathfrak{R} \boldsymbol{y} =_{\text{df.}} \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y}; \tag{1}$$

si ha così una relazione di preferenza debole che soddisfa all'Ax. 1 ma che non soddisfa all'Ax. 2. Invero esistono coppie di vettori che non sono « confrontabili » per la relazione di preferenza definita dalla (1). Per es., fatto $n=2$ i due vettori

$$\boldsymbol{x} = [5, 3] \quad ; \quad \boldsymbol{y} = [3, 5]. \tag{2}$$

Per quanto riguarda l'Ax. 3, indichiamo come d'abitudine con il

(3) Il Teorema qui citato fu dimostrato da B. Levi nella memoria dal titolo « Fondamenti della metrica proiettiva » pubblicata in Atti dell'Accademia di Torino (2), 54 (1904), pag. 284.

Si veda anche al proposito: C. F. Manara, *Un teorema di* Beppo Levi *riguardante la logica formale*, Periodico di Matematiche (4) 43 (1965), pp. 1-6.

simbolo

$$E(\lambda) \qquad (\lambda \in \boldsymbol{R}) \tag{3}$$

la funzione « parte intera di $\lambda$ », cioè il numero intero tale che si abbia

$$E(\lambda) \leq \lambda < E(\lambda) + 1. \tag{4}$$

Definiamo ora una relazione di preferenza debole mediante le seguenti convenzioni: poniamo che valga la relazione

$$\boldsymbol{x} \mathfrak{R} \boldsymbol{y} \tag{5}$$

se vale la relazione

$$E(|\,\boldsymbol{x}\,|) - E(|\,\boldsymbol{y}\,|) = 0$$

oppure la relazione

$$E(|\,\boldsymbol{x}\,|) - E(|\,\boldsymbol{y}\,|) \equiv 1 \pmod{3}.$$

In parole: diremo che il vettore $\boldsymbol{x}$ è preferito in senso debole al vettore $\boldsymbol{y}$ se la differenza tra i moduli dei due vettori è uguale a zero oppure è congruente ad 1 rispetto al modulo 3. Si ha quindi che la negazione della validità della (5) è conseguenza del sussistere della relazione

$$E(|\,\boldsymbol{x}\,|) - E(|\,\boldsymbol{y}\,|) \equiv 2 \pmod{3}, \tag{6}$$

e viceversa.

Si verifica immediatamente che per la relazione di preferenza debole ora definita valgono gli assiomi 1 e 2. Tuttavia è facile costruire una terna di vettori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ tali che si abbia

$$\begin{cases} E(|\,\boldsymbol{x}\,|) - E(|\,\boldsymbol{y}\,|) \equiv 1 \pmod{3} \\ E(|\,\boldsymbol{y}\,|) - E(|\,\boldsymbol{z}\,|) \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \tag{7}$$

ed anche

$$E(|\,\boldsymbol{x}\,|) - E(|\,\boldsymbol{z}\,|) \equiv 2 \pmod{3}. \tag{8}$$

Si ha ovviamente, per la (5)

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y}\mathfrak{R}\boldsymbol{z}$$

ma per la (6) e la (8) si ha anche

(9) $$\neg\, \boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{z}.$$

Per quanto riguarda l'Ax. 4, consideriamo il caso particolare in cui è $n=2$; indichiamo con

(10) $$\boldsymbol{x}=[x_1\,,\ x_2]$$

un vettore dello spazio $V$, che è in questo caso a due dimensioni e consideriamo la funzione delle due variabili $x_1$, $x_2$ data da

(11) $$F(x_1\,,\ x_2)=\frac{x_1+x_2-4}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{3}(x_1-x_2)^2\right)}.$$

Si verifica facilmente che, preso un qualunque vettore $\boldsymbol{x}\in X$, esiste un solo valore reale positivo $t$ tale che si abbia

(12) $$F(tx_1\,,\ tx_2)=0;$$

pertanto tale valore $t$ risulta essere una funzione reale (che si verifica subito essere continua) dei vettori appartenenti ad $X^+$. Consideriamo ora la funzione $u$ reale dei vettori $\boldsymbol{x}\in X^+$ definita da

(13) $$u(\boldsymbol{x})=1/t$$

essendo $t$ la funzione definita precedentemente e poniamo anche

(13') $$u(\mathbf{0})=0.$$

Si verifica facilmente che la funzione $u(\boldsymbol{x})$ definita ora è continua in $X$. Poniamo ora che, dati due vettori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in X$ si abbia

(14) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \quad \text{se è} \quad u(\boldsymbol{x})\geq u(\boldsymbol{y})$$

ed anche

(15) $$\boldsymbol{x}\mathfrak{I}\boldsymbol{y} \quad \text{se è} \quad u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{y}).$$

Abbiamo così stabilito un ordinamento in tutto $X$ che soddisfa gli Assiomi 1, 2, 3. Tuttavia questo ordinamento non soddisfa all'Ax. 4, come si verifica subito considerando i due vettori seguenti

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}=[1.650902,\ 1.2318773] \\ \boldsymbol{b}=[1.703281,\ 1.2318773]. \end{cases}$$

Invero si ha ovviamente

$$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{a}$$

mentre è, come si verifica con calcoli immediati

$$u(\boldsymbol{a}) > u(\boldsymbol{b}).$$

Per quanto riguarda infine l'Ax. 5 consideriamo la funzione definita in $X$ e data dalle relazioni seguenti

$$(16) \qquad \begin{cases} u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i & \text{se è} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < \sqrt{n} \{ \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \}^{1/2} \\ u(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} & \text{se è} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sqrt{n} \{ \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \}^{1/2} \end{cases}$$

definiamo ancora le relazioni di preferenza debole e di indifferenza secondo le (14) e (15), usando ora la funzione $u(\boldsymbol{x})$ definita dalle (16).

La relazione di preferenza debole così definita soddisfa agli Assiomi 1, 2, 3, 4 e non soddisfa all'Ax. 5, perchè la varietà $M(\boldsymbol{x})$ non è chiusa, come si verifica subito.

§ 7. Consideriamo ora un qualunque vettore $\boldsymbol{z} \in X^{+}$ e fissiamo l'attenzione sull'insieme dei vettori che sono multipli di $\boldsymbol{z}$ secondo un numero reale non negativo; indicheremo tale insieme con $H(\boldsymbol{z})$ ponendo quindi

$$(1) \qquad H(\boldsymbol{z}) = \{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{z} \wedge \lambda \in R \wedge \lambda \geq 0 \}.$$

Appare immediata la constatazione del fatto che l'insieme $H(\boldsymbol{z})$ ora definito costituisce l'immagine della semiretta reale

$$(2) \qquad \lambda \geq 0$$

nell'insieme $X$ di vettori e che l'applicazione data da

$$(3 \qquad \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{z}$$

tra la semiretta reale definita dalla (2) e l'insieme $X$ è biunivoca e continua in entrambi i sensi.

Si ha inoltre che l'applicazione definita dalla (3), in forza dell'Ax. 4 stabilisce un isomorfismo tra l'ordinamento dell'insieme $H(\boldsymbol{z})$, ordinato secondo la relazione di preferenza debole « $\mathfrak{R}$ » e la semiretta reale (2) ordinata secondo la relazione indicata abitualmente con il simbolo « $\leq$ ».

Precisamente si ha il

LEMMA 1. Considerati due vettori $\boldsymbol{x}^1$ ed $\boldsymbol{x}^2$ appartenenti ad $H(\boldsymbol{z})$ e tali che si abbia

$$\boldsymbol{x}^1 = \lambda_1 \boldsymbol{z} \quad ; \quad \boldsymbol{x}^2 = \lambda_2 \boldsymbol{z} \tag{4}$$

si ha

$$\boldsymbol{x}^1 \mathfrak{P} \boldsymbol{x}^2 \tag{5}$$

ogni volta che è

$$\lambda_1 > \lambda_2 \tag{6}$$

e viceversa ed anche si ha

$$\boldsymbol{x}^1 \mathfrak{R} \boldsymbol{x}^2 \tag{7}$$

ogni volta che è

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 , \tag{8}$$

ed infine si ha

$$\boldsymbol{x}^1 \mathfrak{I} \boldsymbol{x}^2 \tag{9}$$

allora ed allora soltanto che è

$$\lambda_1 = \lambda_2 . \tag{10}$$

La dimostrazione di questo Lemma è immediata in forza di quanto precede e dell'Ax. 4.

In particolare quindi si ha che l'insieme $H(\boldsymbol{z})$ è chiuso, rispetto alla topologia che abbiamo stabilito sullo spazio $V$, e quindi si ha immediatamente, in forza dell'Ax. 5 la validità della seguente

OSSERVAZIONE. Quali che siano i vettori $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ appartenenti ad $X$, l'insieme intersezione

$$M(\boldsymbol{y}) \cap H(\boldsymbol{z}) \tag{11}$$

è chiuso.

Sussiste ora il fondamentale

LEMMA 2. Se $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$ l'insieme (11) corrisponde sulla semiretta definita dalla (2) ad una semiretta chiusa.

Per la dimostrazione si osservi anzitutto che, quali che siano i vettori $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ appartenenti a $X$, se è $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$ in forza dell'Ax. 4 esiste certo un numero reale $\lambda$ tale che, posto

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{z}$$

si abbia

$$\boldsymbol{x} \mathfrak{J} \boldsymbol{y}$$

e pertanto l'insieme (11) nelle ipotesi poste non è vuoto.

Ma per il Lemma 1 si ha che, per ogni $\lambda'$ reale tale che sia

$$\lambda' \geq \lambda$$

posto

$$\boldsymbol{x}' = \lambda \boldsymbol{z}$$

si ha

$$\boldsymbol{x}' \mathfrak{R} \boldsymbol{x}$$

e quindi anche $\boldsymbol{x}'$ appartiene all'insieme (11).

Gli sviluppi che seguono ci porteranno alla analisi della frontiera dell'insieme $M(\boldsymbol{y})$ relativo ad un qualunque vettore $\boldsymbol{y} \in X$. A tal fine indichiamo con il simbolo

$$Fr\, A$$

la frontiera di un qualunque insieme $A$ di vettori di $V$.

Sussiste ora il seguente

TEOREMA 1. La varietà di indifferenza $\{\boldsymbol{y}/\mathfrak{J}\}$ relativa ad un qualunque vettore $\boldsymbol{y} \in X$ appartiene alla frontiera dell'insieme $M(\boldsymbol{y})$.

Si ha cioè che la relazione

$$x \in \{y/\mathfrak{J}\} \tag{12}$$

implica

$$x \in Fr\, M(y). \tag{13}$$

Per la dimostrazione supponiamo che si abbia

$$y \neq \mathbf{0}. \tag{14}$$

Infatti se $x = \mathbf{0}$ la varietà di indifferenza $\{y/\mathfrak{J}\}$ si ridurrebbe al solo vettore $\mathbf{0}$, la varietà $M(y)$ coinciderebbe con l'insieme $X$ e la dimostrazione del teorema sarebbe banale.

Consideriamo dunque un vettore $x \in X^+$ che soddisfa alla (12). In forza della ipotesi, esiste almeno un $\delta$ reale e positivo tale che esistono dei vettori di $X$ che hanno da $x$ distanza minore di $\delta$; in altre parole esitse un $\delta$ reale e positivo tale che l'insieme

$$\text{Int}\,(x, \delta) \cap X^+ \tag{15}$$

non è vuoto.

Quindi esiste almeno un vettore $h \in X^+$ tale che per ogni $\eta$ reale e positivo che sia minore di $\delta$ i vettori

$$x + \eta h; \quad x - \eta h \tag{16}$$

appartengono all'insieme (15).

Si osservi inoltre che dei due vettori il primo è sempre preferito in senso forte ad $x$, mentre invece quest'ultimo vettore è preferito al secondo. Si conclude pertanto che in ogni intorno di $x$ che soddisfi alla (15) esistono vettori che appartengono all'insieme $M(y)$ e vettori che non appartengono all'insieme stesso.

La struttura dell'insieme $M(y)$ può essere precisata attraverso una ulteriore analisi. Invero ricordando che abbiamo indicato con $X^{++}$ l'insieme dei vettori di $V$ che hanno *tutte* le componenti positive, è chiaro che si ha

$$X^{++} \subset X^+$$

e che la frontiera dell'insieme $X^{++}$ è formata dall'insieme di tutti i vettori che hanno almeno una componente uguale a zero. Osserviamo ora che, considerato un qualunque vettore $y$, non è detto che l'insieme $M(y)$ appartenga soltanto all'insieme $X^{++}$; qualche vettore dell'insieme $M(\boldsymbol{y})$ può anche appartenere all'insieme $X$ e precisamente alla frontiera di $X^{++}$. In questo caso alla frontiera di $M(\boldsymbol{y})$ appartengono anche i vettori dell'insieme

$$M(\boldsymbol{y}) \cap FrX^{++}.$$

Con queste precisazioni possiamo enunciare il

TEOREMA 2. Considerato un qualunque vettore $\boldsymbol{y} \in X^{+}$, la parte della frontiera dell'insieme $M(\boldsymbol{y})$ che appartiene all'insieme $X^{++}$ è formata da vettori che appartengono alla varietà di indifferenza $\{\boldsymbol{y}/\mathfrak{J}\}$.

Per la dimostrazione occorre quindi far vedere che dalle ipotesi

$$\boldsymbol{x} \in X^{++} \tag{17}$$

e

$$\boldsymbol{x} \in FrM(\boldsymbol{y}) \tag{18}$$

segue la tesi

$$\boldsymbol{x} \mathfrak{J} \boldsymbol{y}. \tag{19}$$

Ora dalla ipotesi (18) segue che, per ogni $\delta$ reale e positivo, all'insieme

$$\mathrm{Int}\,(\boldsymbol{x},\ \delta) \tag{20}$$

appartiene sempre almeno un vettore $\boldsymbol{x}^1$ tale che valga la

$$\boldsymbol{x}^1 \mathfrak{S} \boldsymbol{y}$$

ed almeno un altro vettore $\boldsymbol{x}^2$ tale che valga la

$$\boldsymbol{y} \mathfrak{S} \boldsymbol{x}^2.$$

In altre parole, per ogni $\delta$ positivo, all'insieme (20) appartengono due sottoinsiemi disgiunti e non vuoti di vettori gli uni preferiti in senso stretto ad $\boldsymbol{y}$, e gli altri ai quali $\boldsymbol{y}$ è preferito in senso stretto. Ora dalla ipotesi (17) segue che è possibile fissare un vettore $\boldsymbol{h} \in X^{++}$ tale che per ogni $\eta$ reale e positivo e tale che sia

$$\eta < \delta$$

si abbia

$$(\boldsymbol{x}+\eta\boldsymbol{h})\in \operatorname{Int}(\boldsymbol{x},\ \delta)$$

ed anche

$$(\boldsymbol{x}+\eta\boldsymbol{h})\mathfrak{S}\boldsymbol{y}$$

e si abbia pure in forza delle ipotesi e dell'Ax. 4

$$(\boldsymbol{x}-\eta\boldsymbol{h})\in \operatorname{Int}(\boldsymbol{x},\ \delta)$$

ed anche

$$\boldsymbol{y}\mathfrak{S}(\boldsymbol{x}-\eta\boldsymbol{h})$$

sempre in forza delle ipotesi e dell'Ax. 4. Allora per l'Ax. 5, in seguito alla analisi eseguita nella dimostrazione dei Lemmi 1 e 2 segue la validità della relazione (19).

§ **8.** Procederemo ora alla costruzione di una funzione continua definita sull'insieme $X$ la quale abbia i caratteri di quella che gli Economisti chiamano una « funzione indice di utilità »; in altre parole procederemo alla costruzione di (almeno) una funzione continua $u(\boldsymbol{x})$ che abbia le seguenti proprietà: considerati due qualunque vettori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in X$ la relazione

$$u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

abbia come conseguenza la validità della relazione

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \tag{2}$$

e viceversa, e la validità della relazione

$$u(\boldsymbol{x})\geq u(\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

abbia come conseguenza la validità della relazione

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{R}\boldsymbol{y} \tag{4}$$

e viceversa.

A tal fine facciamo la seguente convenzione: considerato un qualunque vettore $\boldsymbol{x}\in X^{+}$ indichiamo apponendo un apice a destra in alto il vettore $\boldsymbol{x}'$ che è multiplo di $\boldsymbol{x}$ secondo un numero reale positivo ed ha modulo uguale ad 1; poniamo cioè

$$|\boldsymbol{x}|\cdot \boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Fissiamo ora un vettore $\boldsymbol{y}\in X^+$; dalla analisi svolta nella dimostrazione del Lemma 2 segue immediatamente che considerato $\boldsymbol{x}\in X^+$ esiste un solo multiplo di $\boldsymbol{x}$ secondo un numero reale e positivo che sta nella relazione di indifferenza rispetto al vettore $\boldsymbol{y}$.

Indicheremo con il simbolo $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ il numero reale e positivo tale che si abbia

$$\boldsymbol{x}'\cdot \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

ovvero tale che si abbia

$$\boldsymbol{x}'\cdot \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in\{\boldsymbol{y}/\mathfrak{J}\}. \tag{7}$$

Ci proponiamo di studiare le proprietà della funzione $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ considerata come funzione del vettore $\boldsymbol{x}$, fissato che sia il vettore $\boldsymbol{y}$. A tal fine consideriamo un secondo vettore $\boldsymbol{h}\in X^+$ scelto in modo tale che il vettore $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ appartenga pure all'insieme $X^+$, come i vettori $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{h}$. Indichiamo poi con il simbolo

$$m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$$

il minimo numero reale tale che si abbia

$$(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})'m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})\geq \boldsymbol{x}'\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{8}$$

ed indichiamo con il simbolo

$$m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$$

il massimo numero reale tale che si abbia

$$(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})'\cdot m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})\leq \boldsymbol{x}'\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{9}$$

Dalle (8) e (9) si trae immediatamente la validità della relazione

$$m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})\geq m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}). \tag{10}$$

Si dimostra facilmente la validità del seguente

LEMMA 3. Quali che siano i vettori $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ appartenenti all'insieme $X^+$ le due funzioni $m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ ed $m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ tendono al valore

$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ al tendere a zero del modulo del vettore $\boldsymbol{h}$; si ha cioè

$$\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{11}$$

È anche facile dimostrare la validità delle seguenti osservazioni: si ha chiaramente che, per ogni numero reale $t$, la relazione

$$t > m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$$

porta di conseguenza la validità della relazione

$$t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})'\mathfrak{S}\boldsymbol{x}'\cdot\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

e la validità della

$$t < m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$$

porta come conseguenza la validità della

$$\boldsymbol{x}'\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathfrak{S}t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})'.$$

Pertanto, sempre come conseguenza dei Lemmi 1 e 2 si ha che la validità della relazione

$$t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})'\mathfrak{J}\boldsymbol{x}'\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

porta come conseguenza la validità delle relazioni

$$m_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) < t < m_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}). \tag{12}$$

Quindi, come conseguenza della (10) e della (12) si ha la validità del seguente

LEMMA 4. La funzione $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, considerata come funzione del vettore $\boldsymbol{x} \in X^+$, e fissato che sia il vettore $\boldsymbol{y}$ è continua; in formule si ha

$$\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \mu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{13}$$

Consideriamo ora ancora due vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X^+$; dalle analisi che precedono si ha che le due proposizioni

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \tag{14}$$

e

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}'\cdot\mu(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \quad \text{ed} \quad \mathbf{y}=\mathbf{y}'\cdot\mu(\mathbf{y},\ \mathbf{x}) \tag{15}$$

sono equivalenti.

Facciamo ora variare il vettore $\mathbf{y}$ nell'insieme $H(\mathbf{y})$, ponendo

$$\mathbf{y}=t\mathbf{y}' \tag{16}$$

e consideriamo la funzione $\mu(\mathbf{x},\ \mathbf{y}'t)$ questa volta come funzione di $t$, fissato che sia il vettore $\mathbf{x}$. Sussiste il seguente

LEMMA 5. Nelle ipotesi poste la funzione $\mu(\mathbf{x},\ t\mathbf{y}')$ considerata come funzione della variabile reale $t$, fissati che siano i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, è una funzione continua.

Per la dimostrazione si consideri un qualunque valore positivo $t_0$ e si ponga

$$\mu_0=\mu(\mathbf{x},\ \mathbf{y}'t_0); \tag{17}$$

da quanto precede si trae che per ogni valore reale $t$ la relazione

$$t>t_0$$

porta come conseguenza la validità della relazione

$$t\mathbf{y}'\mathfrak{S}t_0\mathbf{y}'.$$

E pertanto l'intervallo aperto definito dalla relazione

$$\mu>\mu_0$$

è immagine dell'intervallo aperto definito dalla relazione

$$t>t_0\,.$$

Analogamente si dimostra che l'intervallo aperto definito della relazione

$$0\leq\mu<\mu_0$$

è immagine dell'intervallo aperto definito dalle relazioni

$$0\leq t<t_0\,.$$

Segue di qui facilmente la tesi del Lemma che abbiamo in vista.

Dalla analisi che precede si trae facilmente che la varietà di indifferenza $\{\boldsymbol{y}/\mathfrak{J}\}$ può essere rappresentata mediante una funzione continua; si ha infatti che la validità della relazione

$$\boldsymbol{x}\mathfrak{J}\boldsymbol{y} \tag{18}$$

è equivalente alla

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'\cdot\mu(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}). \tag{19}$$

La costruzione di una funzione indice di utilità appare ora immediata in base a ciò che abbiamo detto fin qui. Fissiamo infatti un vettore qualsiasi, appartenente all'insieme $X^{++}$; sia per es. il vettore

$$\boldsymbol{s}=[1,\ 1,\ \ldots,\ 1]; \tag{20}$$

si ha allora immediatamente

$$\boldsymbol{s}'=\boldsymbol{s}/\sqrt{n} \tag{21}$$

e poniamo

$$u(\boldsymbol{x})=\mu(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{x}). \tag{22}$$

Come immediata conseguenza di quanto precede, ed in particolare come conseguenza dei Lemmi 3, 4, 5 si ha immediatamente che la funzione definita dalla (22) è funzione continua del vettore $\boldsymbol{x}\in X^{+}$.

Posto infine anche

$$u(\mathbf{0})=0 \tag{23}$$

si ha chiaramente una funzione definita e continua per ogni vettore $\boldsymbol{x}\in X$.

**§ 9.** Lo scopo che avevamo in vista è stato conseguito con le analisi che abbiamo concluse con il § precedente. Vale la pena tuttavia di fare qualche osservazione a proposito delle applicazioni che possono essere fatte delle argomentazioni che abbiamo condotto a termine. Invero il titolo stesso della presente Nota conduce a pensare che la nostra trattazione ha lo scopo principale di risolvere alcuni problemi che riguardano la Teoria economica ed in particolare per es. la teoria del comportamento del consumatore. Sono note le discussioni che hanno accompagnato questa Teoria fin da quando V. PARETO utilizzò la tecnica classica della ricerca di massimi condizionati di funzioni di più variabili per dimostrare che il problema del consumatore ha soluzione, che cioè esiste almeno una combinazione di beni che è preferita (almeno in senso debole, secondo la nomenclatura qui introdotta) ad ogni altra combinazione di beni che sia acquistabile dal consumatore avente un certo reddito, dati che siano i prezzi dei beni stessi.

Ovviamente, quando esista una funzione dell'utilità che sia una funzione continua del vettore $\boldsymbol{x} \in X$, la dimostrazione della esistenza di una soluzione del problema del consumatore è immediata conseguenza di un classico teorema di WEIERSTRASS sulle funzioni continue. In tal caso infatti le componenti di un vettore $\boldsymbol{x} \in X$ vengono interpretate come quantità di certi beni che sono a disposizione del consumatore, e si suppongono noti i prezzi dei beni, prezzi che possono essere interpretati come componenti di un vettore $\boldsymbol{p}$, ponendo

$$\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_n].$$

Supponendo che ogni componente del vettore $\boldsymbol{p}$ sia positiva e supponendo che sia dato il reddito $R$ del consumatore (reddito essenzialmente positivo) le condizioni

$$\boldsymbol{x} \in X \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R \tag{1}$$

definiscono un insieme $S$ compatto nello spazio $V$, e quindi la dimostrazione della esistenza di un massimo per la funzione dell'utilità $S$ è immediata.

Tuttavia le obiezioni che sono state elevate da varie parti a proposito del significato di una funzione indice di utilità ed addirittura a proposito della sua esistenza hanno indotto qualche ricercatore a cercare di dimostrare direttamente l'esistenza di una soluzione del problema del consumatore senza fare appello alla esistenza della funzione dell'utilità e quindi senza far ricorso al teorema di WEIERSTRASS ora ricordato. Anche una analisi breve delle trattazioni ora citate ([4]) porta

---

([4]) Fra le trattazioni riguardanti il problema della utilità del consumatore ricordiamo qui le seguenti:

KENNETH ARROW, *Rational choice functions and orderings*, Economica, 1959, pp. 121-127.

a concludere che gli assiomi posti alla loro base sono sufficienti a poter dimostrare l'esistenza di una funzione di utilità e quindi la dimostrazione diretta della esistenza della soluzione del problema del consumatore, conseguita senza far ricorso alla esistenza ed alla continuità della funzione dell'utilità, può anche apparire come una inutile complicazione.

Vale anche la pena di osservare che, per i fini che interessano all'Economia matematica, ogni funzione definita in $X$ che soddisfi alle condizioni precisate all'inizio del § 8 è atta a fornire una funzione indice di utilità.

Quindi accanto alla funzione $u(\boldsymbol{x})$ da noi definita può essere assunta come funzione indice dell'utilità una qualsiasi funzione continua, monotona, crescente, definita nell'intervallo $[0, \infty)$ della funzione $u(\boldsymbol{x})$.

C. F. MANARA

JOHN CHIPMAN, *The foundations of utility*, Econometrica, 1960, pp. 193-224.

GERARD DEBREU, *Representation of a preference ordering by a numerical function*, in K. M. THRALL, C. H. COOMBS, R. L. DAVIS (coordinatori), Decision Processes, New York, 1954, pp. 159-165.

GERARD DEBREU, *Topological methods in cardinal utility theory*, in K. J. ARROW, S. KARLIN, P. SUPPES (coordinatori), Mathematical Methods in the Social Sciences 1959, Stanford, 1960, pp. 16-26.

GERARD DEBREU, *Theory of value*, New York, 1959.

I. N. HERSTEIN, J. MILNOR, *An axiomatic approach to measurable utility*, Econometrica, 1953, pp. 291-297.

H. S. HOUTHAKKER, *Revealed preference and the utility function*, Economica, 1950, pp. 159-174.

HIROFUMI UZAWA, *Preference and rational choice in the theory of consumption*, Mathematical Methods in the Social Sciences 1959, Stanford, 1960, pp. 129-148.